Prof. Martín Moyano

Z2053 SEGUNDO PARCIAL (recuperatorio) ANÁLISIS MATEMÁTICO II 13/12/20

EJERCICIO 1: Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{f}(x, y, z) = (2z, x, y)$, a través de la superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, con $z \geq 0$.

EJERCICIO 2: Hallar el volumen del sólido limitado por los planos coordenados y la superficie $S: 3x + 2y + 4z - 12 = 0$

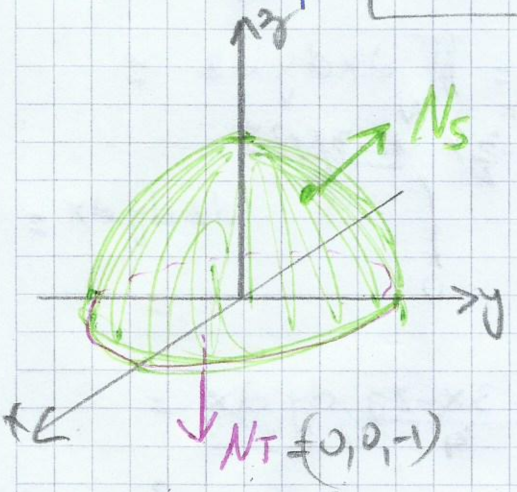
EJERCICIO 3: Determine si $\vec{f}(x, y) = (6xy + 2e^{2x}, 3x^2)$, es un campo vectorial conservativo. En caso afirmativo, obtenga la función potencial correspondiente.

EJERCICIO 4: Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial $y'' - 2y - 8 = 5\, e^3$, que verifica: $y(0) = 1$; $y'(0) = 5$

AM 2	2° parcial (rec) Prof. Mayano	HOJA N° 1/2 FECHA 13-12-20

E1 Calcular el flujo del campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (2z, x, y)$ a través de la sup $S: x^2+y^2+z^2=1$ con $z \geq 0$

superficie ABIERTA



Agrego una tapa: $T: x^2+y^2 \leq 1$ en $z=0$

$S_T = S \cup T$

$$\boxed{\oiint_{S_T} \bar{F} d\bar{s} = \iint_S \bar{F} d\bar{s} + \iint_T \bar{F} d\bar{s}} \; (*)$$

$N_T = (0,0,-1)$

S_T: sup cerrada, frontera de W, orientada al ext

W: una región $\mathbb{R}^3$

$\bar{F} = (P, Q, R)$

$\bar{F} \in C^1$ (componentes polinómicas)

$\Rightarrow$ T. Gauss $\Rightarrow$ $\oiint_{S_T} \bar{F} d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\,dy\,dz$

$\triangle$ $\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z = 0 \longrightarrow \boxed{\oiint_{S_T} \bar{F} d\bar{s} = 0}$

$$\iint_T \bar{F} d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} \bar{F}\, N_T\, dx\,dy = \iint_{T_{xy}} (2z, x, y)(0,0,-1)\, dx\,dy = \underbrace{\iint_{T_{xy}} -y\, dx\,dy}$$

$$\boxed{\iint_T \bar{F} d\bar{s} = 0}$$

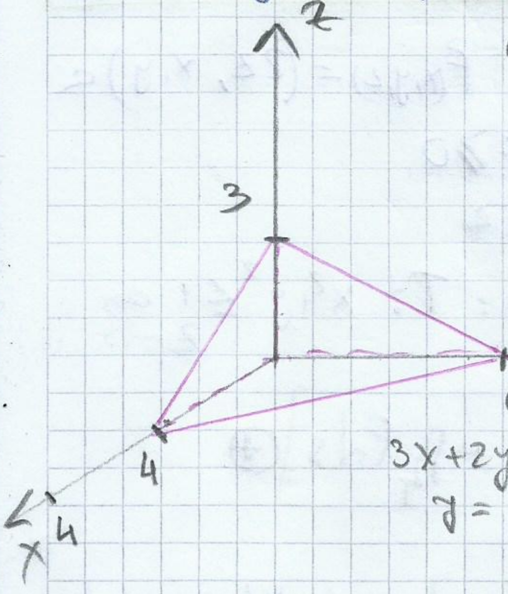
por la simetría en $y \rightarrow \iint = 0$

$(*)$ $\quad 0 = \iint_S \bar{F} d\bar{s} + 0$

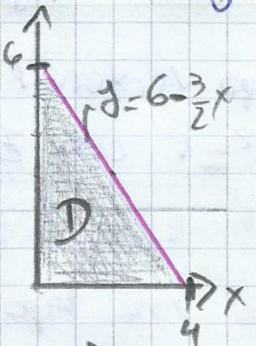
$$\boxed{\iint_S \bar{F} d\bar{s} = 0}$$

NOTA

E2 Hallar el vol. del sólido limitado por los planos coordenados y la sup. $S: 3x+2y+4z-12=0$



$$y = 6 - \frac{3}{2}x$$



$0 \leq x \leq 4 \quad 0 \leq y \leq 6 - \frac{3}{2}x$

$0 \leq z \leq \frac{12-3x-2y}{4}$

$$Vol_W = \iiint_W dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}x} \int_0^{\frac{12-3x-2y}{4}} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{6-\frac{3}{2}x} \frac{12-3x-2y}{4}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 12y - 3xy - y^2 \Big|_0^{6-\frac{3}{2}x} dx = \frac{1}{4}\int_0^4 12\left(6-\frac{3}{2}x\right) - 3x\left(6-\frac{3}{2}x\right) - \left(6-\frac{3}{2}x\right)^2 dx = 12$$

$$\boxed{Vol_W = 12}$$

E3 Determinar si $f_{(x,y)} = (6xy + 2e^{2x}, 3x^2)$ es un campo conservativo. En caso afirmativo, obtener la función potencial correspondiente

$\bar{F} \in C^1$ y $dm(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$ Analizo si tiene matriz jac. simétrica

$$\bar{F} = (P, Q) \rightarrow \begin{cases} P'_y = 6x \\ Q'_x = 6x \end{cases} \Rightarrow = \checkmark \quad \boxed{\bar{F} \text{ es campo conservativo}}$$

$\bar{F}$ campo conservativo $\Rightarrow \exists\, \varphi \mid \bar{F} = \nabla\varphi \Rightarrow (P,Q) = (\varphi'_x, \varphi'_y)$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 6xy + 2e^{2x} \xrightarrow{\text{int. en } x} \varphi_{(x,y)} = 3x^2y + e^{2x} + \alpha(y) \\ \varphi'_y = 3x^2 \xrightarrow{\text{int. en } y} \varphi(x,y) = 3x^2y + \beta(x) \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = 3x^2y + e^{2x} + C}$$

NOTA

AM2	2° parcial (recup) Prof Moyano	HOJA N° 2/2
		FECHA 13-12-20

$\boxed{E4}$: Encontrar la solución particular de la ec. diferencial

$$y'' - 2y - 8 = 5e^{3x}$$

que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

SH) $y'' - 2y = 0$

$r^2 - 2 = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$

$$\boxed{y_H = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}}$$

SP) $y_p = C + De^{3x}$

$y'_p = 3De^{3x}$

$y''_p = 9De^{3x}$

$y'' - 2y = 8 + 5e^{3x}$

$9De^{3x} - 2(C + De^{3x}) = 8 + 5e^{3x}$

$9De^{3x} - 2C - 2De^{3x} = 8 + 5e^{3x}$

$-2C + e^{3x}(9D - 2D) = 8 + 5e^{3x}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2C = 8 \\ 7D = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C = -4 \\ D = 5/7 \end{matrix}$

$$\boxed{y_p = \frac{5}{7}e^{3x} - 4}$$

$y_G = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{7}e^{3x} - 4$

$y'_G = \sqrt{2}Ae^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}Be^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{7} \times 3e^{3x}$

$y(0) = 1 = A + B + \frac{5}{7} - 4 \longrightarrow \begin{cases} A + B = 30/7 \\ \sqrt{2}A - \sqrt{2}B = 20/7 \end{cases}$

$y'(0) = 5 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B + \frac{15}{7} \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{matrix} A = 3{,}153 \\ B = 1{,}133 \end{matrix}}$$

$$\boxed{y_G = 3{,}153e^{\sqrt{2}x} + 1{,}133e^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{7}e^{3x} - 4}$$

NOTA